**Заметки на полях**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

*(ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ)*

**П.А. ЖИЛИН**

**Статика**

**Предисловие**

Классическая механика в XX веке развивалась весьма интенсивно

и претерпела существенные изменения. **Главное изменение** связано с переходом на фундамент эйлеровой механики, являющейся естественным развитием ньютоновой механики. При этом все, что было достигнуто ранее, полностью сохраняется и не требует никаких изменений.

Труды Эйлера (поражает даже количество- 866 за 17 лет)

<http://www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/alison/Dom/E-pages/Enestrom_Index.pdf>

<http://www.eulerarchive.com/>

**E177** Dйcouverte d'un nouveau principe de mйcanique, par M. Euler.

*Mйmoires de l’acadйmie des sciences de Berlin* [6], (1750), 1752, p. 185-217 + 1 diagram.

According to C. G. J. Jacobi, a treatise with this title was presented to the Berlin Academy on

September 3, 1750.

Маркиз [Кондорсе](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D0%B4%D0%BE%D1%80%D1%81%D0%B5%2C_%D0%9C%D0%B0%D1%80%D0%B8_%D0%96%D0%B0%D0%BD_%D0%90%D0%BD%D1%82%D1%83%D0%B0%D0%BD_%D0%9D%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B0) сообщает, что вскоре после переезда из России в Берлин Эйлера пригласили на придворный бал. На вопрос королевы-матери, отчего он так немногословен, Эйлер ответил: «Государыня, простите, я отвык: я приехал из страны, где кто разговаривает, того вешают»[[12]](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%2C_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#cite_note-15).

Основное отличие эйлеровой механики от ньютоновой механики заключается в более полном и последовательном учете **спинорных движений**.

Чем спинорные движения отличаются от вращательных?

Уравнения баланса количества движения и кинетического момента становятся независимыми законами. Понятие силы сохраняется, но момент уже не полностью определяется силами, а является самостоятельной сущностью. В дополнение к классической эйлеровой механике в данном курсе добавлен еще один фундаментальный закон — уравнение баланса энергии.

В настоящее время уже стало очевидным, что главной причиной ограниченности ньютоновой механики является игнорирование в ней спинорных движений, играющих главную роль в микромире.

* 1. **Воздействия: силы и моменты**

В механике изучаются движение и равновесие материальных тел. Под те-

лами, вообще говоря, понимаются *материальные образования различной при-*

*роды и строения*. Например, в качестве тела может выступать объем газа или

жидкости, заключенный внутри некоторой воображаемой замкнутой поверх-

ности. Выделенную систему материальных точек также можно рассматривать

как тело. Телами являются нити, стержни, твердые деформируемые тела, аб-

солютно твердые тела и многое другое.

Однако в данной главе в качестве

основного тела у нас будут фигурировать абсолютно твердые тела. Кроме то-

го, в данной главе равновесие тела будет пониматься как состояние покоя в

выбранной системе отсчета.

В равновесии находятся силы. Тело находится в покое.

Но если тело покоится, то всякое тело можно воспринимать как абсолютно твердое тело. Эту идею часто называют принципом замораживания.

Не ясен термин «воспринимать».

Силы наделяются следующими свойствами:

1. Сила **F**(*A*, *B*) является свободным полярным вектором и моделирует си-

ловое воздействие тела *B* на тело *A*.

Опираясь на инвариантность главного вектора, автор объявляет силу из винта Пуансо свободным вектором. Судя по дальнейшему, не совсем свободным, поскольку точка приведения Р (фактическая точка приложения силы) должна, согласно автору, принадлежать телу. Студент «интуитивно» понимает, что сила имеет точку (площадь, объем) приложения.

2. Сила **F**(*A*, *B*) аддитивна по телам, составляющим тело *B*

**F**(*A*, *B*) = **F**(*A*, *C* ∨ *D*) = **F**(*A*, *C*)+**F**(*A*,*D*), *B* = *C*∨*D*, *C*∧*D* = ∅ (1.1.1)

где символ “∨” следует воспринимать как союз “и”.

Т.е.сила равна главному вектору сил. По Пуансо.

3. Сила **F**(*A*, *B*) аддитивна по телам, составляющим тело *A*

**F**(*A*, *B*) = **F**(*C* ∨ *D*, *B*) = **F**(*C*, *B*) + **F**(*D*, *B*), *A* = *C* ∨ *D*, *C* ∧ *D* = ∅.

(1.1.2)

А это значит что:

1. воздействия могут быть распределены по всему телу. В каждой точке их можно суммировать. А результаты суммировать по точкам.
2. Допускается, что среда может действовать и на одну точку. А это значит, что сила не есть свободный вектор. Но и в этом случае автор предлагает переносить эту силу по телу, добавляя уравновешивающий момент.

**Введение момента** начинается с выбора опорной точки Q, которую можно

выбирать совершенно произвольно, но она должна быть фиксирована (непо-

движна) в системе отсчета. Например, в качестве опорной точки можно вы-

брать начало в системе отсчета.

Если в опорной точке нет опоры, то момент лишь характеристика, а не действие. Если опора есть, но не является центром масс тела, то момент вызывает силу реакции опоры. Противоположная ей сила движет центр масс. Только если тело оперто в центре масс, то момент не вызывает реакции опоры.

Далее необходимо выбрать еще одну точку P,

называемую точкой приведения. Последняя может выбираться произвольно,

но она должна быть жестко зафиксирована относительно рассматриваемого

тела *A*.

Потому, что в точке Р фактически приложена сила, а приложить ее можно только к телу. Если в качестве Р взять центр масс С, то воздействие разделится на трансляционное и вращательное вокруг С.

***Определение:*** *моментом* **M**Q (*A*, *B*)*, действующим со стороны тела B на*

*тело A и вычисленным относительно опорной точки* Q*, называется свобод-*

*ный аксиальный вектор, выражаемый следующей конструкцией*

**M**Q (*A*, *B*) = (**R**P − **R**Q) *Х* **F** (*A*, *B*) + **L**P (*A*, *B*) , (1.1.3)

*где вектор* **R**Q *определяет положение опорной точки* Q*; век тор* **R**P *— опре-*

*деляет положение точки приведения; первое слагаемое в правой части (1.1.3) называется моментом силы* **F** (*A*, *B*)*; век тор* **L**P (*A*, *B*) *называется собственно моментом — он зависит от выбора точки приведения* P*, но не зависит от выбора опорнопоры в Qой точки* Q*.*

 «Конструкция» есть запись зависимости главного момента от центра, которая легко доказывается. Не ясно как вычисляется **L**P. В примерах автор для каждой силы выбирает Р в точке приложения силы, так, чтобы **L**P оказалось равным нулю. Зачем тогда нужна эта точка?

Полный момент **M**Q (*A*, *B*), по определению, не зависит от выбора точки

приведения. Отсюда следует, что при изменении точки приведения собственно

момент меняется так, чтобы полный момент **M**Q (*A*, *B*) остался неизменным.

Пусть P и S две разные точки приведения. Тогда имеем

**L**S (*A*, *B*) = (**R**P − **R**S) *Х* **F** (*A*, *B*) + **L**P (*A*, *B*) . (1.1.4)

Опять известная зависимость главного момента от центра

Фактически постулируется теорема Пуансо. Не зная ее простого доказательства, принять «аксиоматически» на веру эту «конструкцию» трудно.

Моменты наделяются следующими свойствами, вводимыми аксиоматиче-

ски:

1. Момент **M**Q(*A*, *B*) является свободным аксиальным вектором и модели-

рует моментное воздействие тела *B* на тело *A*.

2. Момент **M**Q(*A*, *B*) аддитивен по телам, составляющим тело *B*

**M**Q(*A*, *B*) = **M**Q(*A*, *C* ∨ *D*) = **M**Q(*A*, *C*) +**M**Q(*A*,*D*), *B* = *C* ∨ *D*. (1.1.5)

3. Момент **M**Q(*A*, *B*) аддитивен по телам, составляющим тело *A*

**M**Q(*A*, *B*) = **M**Q(*C* ∨ *D*, *B*) = **M**Q(*C*, *B*) +**M**Q(*D*, *B*), *A* = *C* ∨ *D*. (1.1.6)

Силы и моменты сложны для восприятия начинающим. Особенно это отно-

сится к понятию момента. Необходимость введения моментов как самостоя-

тельных сущностей была впервые осознана Л. Эйлером в 1771 г. Это означало

принципиальную неполноту ньютоновой механики. К сожалению, стараниями

Ж. Лагранжа фундаментальное открытие Л. Эйлера было предано забвению

на более чем столетие.

Независимые от сил моменты были вновь введены в

механику только в начале XX-го столетия.

В каком смысле независимы? Ведь сила входит в выражение момента (1.1.3) !

Сила- единственное физическое понятие. Нет сосредоточенных сил, есть силовые поля разной размерности. Сила- вектор есть результирующая (Пуансо) сил поля.

Момент силы – это ее свойство поворачивать тело, при наличии опоры в центре моментов. Момент как таковой есть вращательная система сил с нулевым главным вектором и не нулевым главным моментом.

 Не вдаваясь в подробности этой драматической для механики истории, вернемся к обсуждению понятий сил и

моментов. Трудность этих понятий заключается в том, что силы и моменты

выражают совершенно конкретные физические идеи, являющиеся первичны-

ми понятиями и не поддающиеся математической формализации, но вполне

определенные на интуитивном уровне. Ключом к пониманию сил и моментов

являются следующие утверждения:

*а) сила* **F** (*A*, *B*) *— это реакция тела B на изменение положения тела A;*

*б) момент* **L**P (*A*, *B*) *— это реакция тела B на повороты тела A вокруг*

*точки приведения* P*.*

Возможно, речь идет о реакциях связей. Поле сил тяготения действует на тело без всяких перемещений.

Для того, чтобы интуитивно ощутить наличие силы **F** (*A*, *B*) необходимо

проделать следующую мысленную процедуру: 1) удалить из Вселенной все

тела за исключением тел *A* и *B*; 2) мысленно “заморозить” тело *A* и превра-

тить его в абсолютно твердое; 3) мысленно придавать всем точкам *A* всевоз-

можные бесконечно малые смещения ξ**e**, где **e** — произвольный единичный

вектор. Если тело *B* как-то препятствует описанным смещениям тела *A*, то си-

ла **F** (*A*, *B*) отлична от нуля. Если существует такое направление **e***∗*, что тело *B* не препятствует смещению тела *A* в этом направлении, то проекция **F** (*A*, *B*)

на **e***∗* равна нулю.

Для того, чтобы ощутить наличие собственно момента **L**P (*A*, *B*), необхо-

димо: 1) и 2) как для силы; 3) закрепить точку приведения в теле отсчета и

относительно тела *A*, т.е. тело *A* и точка P должны составлять абсолютно

твердое тело с неподвижной точкой P; 4) мысленно поворачивать тело *A* во-

круг P на всевозможные бесконечно малые векторы поворота ϕ**e**, где |**e**| = 1.

Если тело *B* как-то препятствует описанным поворотам тела *A*, то **L**P (*A*, *B*)

отличен от нулевого вектора. Если существует такая ось, проходящая через P

и натянутая на вектор **e***∗∗*, что тело *B* не препятствует повороту тела *A* вокруг

этой оси, то проекция **L**P (*A*, *B*) на **e***∗∗* равна нулю\_\_

Так можно объяснять структуру реакций связей, не более.

После всего сказанного выше выявляется некий недостаток введенной вы-

ше терминологии. А именно, вектор **M**Q(A,B) был назван моментом, дей-

ствующим со стороны тела B) на тело A. На самом деле моментом, реаль-

но действующим со стороны тела B на тело A, является только собствен-

но момент **L**P(A,B).

Реально вращает тело только **L**С(A,B) относительно центра масс тела. При остальных центрах приведения на вращение влияют как момент, так и сила.

 Например, пусть даны две материальные точки A и B.

Пусть **F**(A,B) есть сила, действующая со стороны тела B на тело A.

Точки или тела?

Тогда

**M**Q(A,B) = (**RА**−**R**Q)*Х* **F**(A,B), по определению, называется моментом, дей-

ствующим со стороны материальной точки B на материальную точку A. Но

на материальную точку никакие моменты действовать не могут, поскольку

материальная точка не реагирует на повороты. Так что (**R** − **R**Q) *Х* **F**(A,B)

это просто момент силы, действующей на материальную точку A. Отмечен-

ное обстоятельство будет необходимо иметь в виду при написании мощности

внешних воздействий.

Вот именно- это просто характеристика. Точно так же момент силы, приложенной в центре масс, не вращает тело, если нет опоры в другой точке тела.

Сказанное дает интуитивно ясное представление о природе понятий сил

и моментов. К сожалению, этого нельзя просто выучить, только настойчивая

практика применения этих понятий ведет к успеху.

Все это способно запутать кого угодно.

***Определение****: пара векторов* \_**F** (*A*, *B*) ; **M**Q (*A*, *B*)\_ *называется воздей-*

*ствием тела B на тело A.*

***Определение****: воздействие тела B на тело A называется чисто силовым*

*(или просто силовым), если существует такая точка приведения* **R**P(t)*, что*

*при любых движениях тела A воздействие тела B на тело A определяется*

*заданием пары векторов*

{**F** (*A*, *B*) ; (**R**P(t) − **R**Q) *Ч* **F** (*A*, *B*)} , \_**L**P (*A*, *B*) = **0**\_, (1.1.7)

*причем такая точка* P *называется центром силового воздействия.*

Это называется осуществимой равнодействующей. Опять же, если Р не совпадает с С, то сила оказывает воздействие и на вращение тела. Назвать его чисто силовым трудно.

Во многих книгах по механике центр силового воздействия называют точ-

кой приложения силы **F** (*A*, *B*). Строго говоря, это неправильно, ибо векторы

**F** (*A*, *B*), **M**Q (*A*, *B*), **L**P (*A*, *B*) — суть свободные векторы и ни к каким точкам

тела не прилагаются, а центр силового воздействия может находиться вне тела

*A*.

Именно так, там она и приложена (мысленно и эквиваленьно)

Отмеченная неточность не так безобидна, как кажется на первый взгляд:

говоря о точках приложения, мы внушаем ученику принципиально неверное

на интуитивном уровне представление о силе, что помешает ему, если он за-

хочет изучать явления, выходящие за рамки традиционно рассматриваемых в

классической механике.

Студент поражен. Он в боксе бьет по морде, а его уверяют, что он бьет по ногам, прикладывая к ним момент. Забавно и грустно.

***Определение****: воздействие тела B на тело A называется чисто момент-*

*ным, если сила* **F** (*A*, *B*) *равна нулю.*

Вот это и есть момент.

Описанными выше свойствами исчерпываются все постулаты, относящиеся

к воздействиям в общем случае. Эти постулаты не определяют конкретного

вида сил и моментов, они только фиксируют их основные свойства.

***Примечание.*** *Аксиомы аддитивности в учебниках по теоретической меха-*

*нике часто подменяются так называемым “принципом независимости сил”*

*или “Четвертым законом Ньютона”. Следует иметь в виду, что аддитив-*

*ность воздействий всеобща, а независимость воздействий, как правило, не*

*имеет места. Иными словами, интенсивность воздействия тела B на тело*

*A в общем случае зависит от присутствия третьего тела C.*

Приведенное выше интуитивное понимание сил и моментов лежит в ос-

нове всей механики. Его нельзя формализовать, т.е. заменить некими матема-

тическими конструкциями. Этим механика отличается от чистой математики.

Присутствие интуиции в механике, как и в любой другой науке, изучающей

Природу, неустранимо в принципе. Впрочем, интуиция неустранима и в мате-

матике, если только добраться до ее логических оснований. Просто в механике,

в отличие от математики, присутствие интуиции необходимо на всех уровнях:

от логических оснований до сугубо прикладных вопросов. Знаменитое заяв-

ление Ж. Лагранжа в предисловии к “Аналитической механике” о том, что он

преобразовал механику в раздел математики не соответствует действительно-

му положению вещей и никогда не будет ему соответствовать.

**1.2. Законы равновесия**

Законы статики в механике были открыты более двух с половиной тысяче-

летий назад, но точная дата их открытия не известна. Установлено, что законы

статики во вполне осознанной форме активно использовались Архимедом,

которого можно назвать прародителем современной рациональной механики.

Настоящее рождение рациональная механика получила в трудах Галилео Гали

лея. До Л. Эйлера статика и динамика, по существу, выступали как различные

науки. Только после трудов Л. Эйлера было окончательно осознано, что при-

рода воздействий в статике и динамике в точности одна и та же. Более того,

стала окончательно ясной динамическая природа воздействий, т.е. сил и мо-

ментов. Законы статики являются чрезвычайно идеализированными частными

случаями законов динамики.

Все в науке идеализировано. Сама динамика тоже создана для моделей. Однако в рамках идеальной динамики, статика является ее частным случаем.

 В Природе, как таковой, статика не существует. ???????????????????

Следует обратить внимание на то, что в предыдущем пункте описание инту-

итивного восприятия воздействий опиралось на идею движений. Воздействие

тела *B* на тело *A* есть реакция тела *B* на бесконечно малые движения тела *A*.

Не убедительно. Поля.

Именно по этой причине в последние десятилетия статику предпочитают из-

лагать после формулировки фундаментальных законов. Статические расчеты

полезны, поскольку позволяют относительно простыми средствами получить

важные оценочные результаты. Но окончательные суждения можно получить

только на основании динамических расчетов, которые несравнимо сложнее статических расчетов.

Данная книга следует старым традициям и содержит

изложение статики до формулировки фундаментальных законов. Основани-

ем для этого служит возможность тренировки в усвоении векторного языка

на простых задачах механики. Кроме того, знание законов статики в их, так

сказать, чистом виде является необходимым элементом любого технического

образования. Сказанное справедливо даже несмотря на некоторую логическую

уязвимость законов статики, которая, впрочем, совершенно не сказывается на

получаемых результатах. ?????????????? Вместе с тем, рассмотрение целого ряда важных для учения о равновесии тел вопросов будет сделано только после изложения фундаментальных законов механики.

***Первый и второй законы статики****: если произвольное тело A находится*

*в покое (в равновесии), то сила* **F**(*A*,*A*e) *и момент* **M**Q (*A*,*A*e)*, действующие*

*на тело A со стороны его окружения A*e*, равны нулю, т.е.*

**F**(*A*,*A*e) = **0**, **M**Q (*A*,*A*e) = (**R**P − **R**Q)*Х***F** (*A*,*A*e)+**L**P (*A*,*A*e) = **0**. (1.2.1)

Французская идея постулировать все, что долго доказывать.

Выполнение условий (1.2.1) не гарантирует, что тело *A* действительно будет

находиться в покое.

Иначе говоря, они необходимы, но не достаточны.

На самом деле, если любая система находится в покое (а не в равновесии), то с **необходимостью** выполняются условия равновесия внешних сил, достаточные только для твердого тела.

Необходимость не надо постулировать. Она вытекает из факта выполнения условий покоя всех частей тела, и свойства внутренних сил. Суммируем и получаем.

Оно может совершать движения относительно выбранной

системы отсчета. Даже если тело *A* является абсолютно твердым телом, то и

тогда оно может совершать так называемые движения по инерции, о чем будет

сказано при формулировке основной аксиомы механики.

Все дело в формулировке. Условия достаточны для СОХРАНЕНИЯ покоя тела.

В общем случае тела

*A* эти движения могут иметь относительно сложный характер. Однако сейчас

нас интересуют не движения. Мы видим глазами, что тело находится в покое.

Тогда первый и второй закон статики (1.2.1) обязаны выполняться. Если зако-

ны статики не выполняются, то тело заведомо не может находиться в покое.

При практическом использовании условий равновесия (1.2.1) целесообразно

активно использовать свойства аддитивности воздействий.

Изучающему рациональную механику следует обратить внимание на сле-

дующие обстоятельства. Условия статики (1.2.1) записываются для тела *A* с

учетом тел окружения *A*e. Однако тела сами по себе не фигурируют в урав-

нениях (1.2.1). Они входят в уравнения равновесия только через создаваемые

ими силы и моменты. Это означает, что при написании уравнений равновесия

мы должны мысленно отбросить все тела, за исключением самого тела *A*, а

тела окружения заменить силой **F** (*A*,*A*e) и моментом **M**Q (*A*,*A*e). Эту замену

тел создаваемыми ими воздействиями в литературе часто называют *принципом освобождаемости от связей*. Следует, однако, иметь в виду, что сама идея введения воздействий равносильна *принципу освобождаемости от связей*, ибо в механике не существует никаких сил и моментов, отличных от тех, которые моделируют воздействие тел. Иными словами, *принцип освобождаемости от связей* не вносит в механику ничего нового

Совершенно верно. Он вреден. Если отбросить связь, то исчезнет и реакция.

Освобождаться от связи полезно при использовании принципа возможных скоростей. Там связь отбрасывается, получается механизм, а реакция связи заменяется неизвестной АКТИВНОЙ силой, обеспечивающей равновесие.



***Пример****: дано абсолютно твердое тело A, к точкам B и C которого при-*

*креплены тонкие нити, создающие силы* **F**B *и* **F**C*; выяснить, при каких огра-*

*ничениях на силы* **F**B *и* **F**C *тело A находится в равновесии.*

Ну вот и точки приложения сил появились. И нет свободных сил.

Задача имеет только тривиальное решение, поскольку нет нагрузки.

Если это просто две ЗАДАННЫЕ силы, то левая картинка неверна, и читаем дальше.

***Решение.*** *На рис. 1.1,а показано тело с прикрепленными к нему нитями. На*

*рис. 1.1,б нити отброшены, а их воздействие заменено силами. Воздействия*

*передаются на тело только посредством нитей, которые примем за тела*

*окружения и обозначим теми же буквами, что и точки их прикрепления к*

*телу A. Таким образом, имеем A*e = B ∨ C*. Первый закон статики требует,*

*чтобы сила* **F**(A,Ae) *обращалась в нуль. Поэтому имеем равенство*

**F**(*A*,*A*e) = **F**(*A*, *B* ∨ *C*) = **F**(*A*, *B*) + **F**(*A*, *C*) *≡* **F**B + **F**C = **0**. (1.2.2)

*При вычислении момента используем аксиому аддитивности*

**M**Q(*A*,*A*e) = **M**Q(*A*, *B* ∨ *C*) = **M**Q(*A*, *B*) +**M**Q(*A*, *C*), (1.2.3)

*где* Q *— выбранная опорная точка.*

*Для простоты опорную точку совместим с началом* O *в системе отсчета.*

*При вычислении момента* **M**O(*A*, *B*) *необходимо выбрать точку приведения.*

*Выбирать ее можно произвольно. Если в качестве точки приведения выбрать какую-либо точку* P*, не совпадающую с точкой закрепления нити* B*, то собственный момент* **L**P(*A*, *B*) *будет отличен от нуля. Действительно, если мы будем поворачивать тело A вокруг точки* P*, то нить B будет препятствовать этому повороту.*

Связь односторонняя, поэтому неверно.

 *Это и означает, что* **L**P(*A*, *B*) *отличен от нуля. Если же в качестве точки приведения выбрать точку* B*, то собственно момент* **L**B(*A*, *B*) *будет равен нулю, поскольку нить не сопротивляется изгибу. Аналогичные рассуждения нужно провести и для момента* **M**O(*A*, *C*)*. Окончательно получаем равенство*

**M**O(*A*,*A*e) = **M**O(*A*, *B*) +**M**O(*A*, *C*) = **R**B *Х* **F**B + **R**C *Х* **F**C = **0**. (1.2.4)

*Внешне выражение (1.2.4) не совпадает с (1.1.4), но оно легко преобра-*

*зуется к виду (1.1.4). При этом легко убедиться, что не существует такой*

*точки приведения, чтобы собственно момент* **L**P(*A*,*A*e) *равнялся нулю.*

Опять неверно. А если линии действия пересекаются в теле?

*Это означает, что в рассматриваемом примере внешнее воздействие окружения A*e *на тело A не является чисто силовым, хотя воздействия от каждой из нитей являются чисто силовыми. Решая систему (1.2.2) – (1.2.4), получаем*

**F**B = −**F**C, **F**B = λ(**R**C − **R**B),

*где величина* λ *остается произвольной.*

*Если величина* λ *положительна, то положение равновесия устойчиво.*

*Если*

*величина* λ *отрицательна, то положение равновесия неустойчиво, что, ра-*

*зумеется, нужно доказывать отдельно.*

Это просто невозможно, нить сминаема.

*Более того, понятие устойчивости*

*положения равновесия можно ввести в рассмотрение только после изложе-*

*ния фундаментальных законов, что и будет сделано.*

*Как видим, в положении равновесия нити должны быть направлены вдоль*

*прямой, проходящей через точки* B *и* C*. На рис. 1.1 изображено положение,*

*которое не является равновесным. Но для нахождения решения это не имело значения.*

***О действии и противодействии.*** В заключение этого параграфа докажем

одно полезное свойство сил и моментов, аналог которого известен из школьно-

го курса физики под названием третьего закона Ньютона. Подчеркнем только,

что здесь это свойство доказывается, а не постулируется.

Можно постулировать и то и другое. Тогда второе утверждение будет следствием постулата.

Пусть дано тело *A*, находящееся в равновесии, т.е. для него выполняются

уравнения статики (1.2.1). Тело *A* представим как объединение двух тел *B* и

*C*: *A* = *B* ∨ *C*. Поскольку тела *B* и *C* также находятся в равновесии, то и для

них должны выполняться условия статики (1.2.1). При этом следует учесть,

что *B*e = *C* ∨ *A*e, *C*e = *B* ∨ *A*e. Таким образом, имеем систему трех силовых

уравнений

**F**(*A*,*A*e) = **0**,

**F**(*B*, *B*e) = **F**(*B*,*A*e) + **F**(*B*, *C*) = **0**, **F**(*C*, *C*e) = **F**(*C*,*A*e) + **F**(*C*, *B*) = **0**.

(1.2.5)

Складывая последние два уравнения в (1.2.5) и вычитая из получившегося

равенства первое уравнение, получаем

**F**(*B*, *C*) + **F**(*C*, *B*) = **0** ⇒ **F**(*B*, *C*) = −**F**(*C*, *B*) ⇒ **F**(*B*, *B*) = **0**. (1.2.6)

Равенства (1.2.6) выражают словами, что действие равно противодействию,

взятому с обратным знаком, а действие тела на самого себя равно нулю. Обра-

тим внимание, что равенства (1.2.6) имеют смысл тогда и только тогда, когда

сила выражается свободным вектором.

Совершенно аналогичные рассуждения приводят к следующим равенствам

для моментов

**M**Q(*B*, *C*) +**M**Q(*C*, *B*) = **0** ⇒ **M**Q(*B*, *C*) = −**M**Q(*C*, *B*) ⇒

⇒ **M**Q(*B*, *B*) = **0**. (1.2.7)

А где же моменты сил и нецентральное взаимодействие? Ай ай

Хотя законы статики чрезвычайно просты с формальной точки зрения, тем

не менее их полное усвоение возможно только в результате настойчивой прак-

тики. Для этого необходимо самостоятельно рассмотреть несколько десятков

различных задач. Небольшое число иллюстративных задач будет рассмотрено

в следующем параграфе. При этом в рассмотрение будут введены некоторые

важные для приложений понятия.

***Упражнение.*** *Доказать, что если условия статики (1.2.1) выполняются*

*для одной опорной точки, то они выполняются и для любой другой опорной*

*точки.*

* 1. **Принцип рычага Архимеда**

Не совсем понятен пафос доказательства недостаточности Ньютона. Для системы точек Ньютон достаточен. Для тела, движение которого характеризуется двумя векторами: трансляции и поворота, естественно ставить два векторных условия остановки этих движений. Отсюда необходимость второго условия моментов. Лучше сказать, что сам момент возникает из лагранжева принципа возможных скоростей ∑Fi vi=∑Fi hi ω=ω∑m(Fi)

 А само понятие момента введено еще Галилеем и Валлисом в 17 веке (Лагранж, т.1 <http://padabum.com/data/%D0%A4%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B0/%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B6%20%D0%96.%20-%20%D0%90%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F%20%D0%BC%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0%2C%20%D1%82.1.%20594%20%D1%81%D1%82%D1%80.%20%D0%9C.-%D0%9B.%2C%20%D0%93%D0%A2%D0%A2%D0%98%2C%201950.pdf>).

В современном переводе <http://теормеханика.рф/opti/article/id/222131613/>

Уравнение рычага можно доказать, и не привлекая уравнения моментов, что делали многие. Например, предлагаю так:



Принцип рычага еще Декарт вывел через свое «золотое правило механики»- чем больше сила, тем меньше расстояние, которое привело к Лагранжеву принципу виртуальных скоростей.

*В данном параграфе рассматривается самая знаменитая и принципиаль-*

*ная в теоретическом отношении задача механики.*

Рассмотрим задачу статики для конструкции, изображенной на рис. 1.2.

Эта конструкция называется рычагом Архимеда. Рычаг использовался на прак-



тике задолго до Архимеда. Например, используя обычную садовую лопату, мы применяем рычаг Архимеда. Имя Архимеда присвоено принципу рычага потому, что именно Архимед выразил принцип рычага в строгой математической форме. В истории механики принцип рычага

Архимеда сыграл огромную роль.

 Никто и никогда не сомневался в правиль-

ности принципа рычага. Неясным оставался вопрос, является ли принцип ры-

чага следствием первого закона статики или это независимое утверждение. По

существу речь шла о полноте ньютоновой механики. Если последняя полна,

то должно существовать доказательство принципа рычага на основе постула-

тов ньютоновой механики. Было предложено много доказательств принципа

рычага, но все они оказались некорректными.

Л. Эйлер был первым кто за-

явил о необходимости дополнения постулатов ньютоновой механики и ввел

в рассмотрение второй закон динамики, который в статическом случае сво-

дится ко второму закону статики, т.е. ко второму уравнению системы (1.2.1).

Так случилось, что важность и принципиальную значимость открытия Л. Эй-

лера осознал только Ж. Лагранж. Но он не захотел согласиться с этим от-

крытием. В 1788 г., т.е. через пять лет после ухода Л. Эйлера, выходит в

свет “Аналитическая механика” Ж. Лагранжа. Практически все введение к

этому трактату Ж. Лагранж посвящает разбору принципа рычага Архимеда.

Это и понятно. Если принцип рычага можно доказать пользуясь только пер-

вым законом статики, т.е. первым уравнением в системе (1.2.1), то открытие

Л. Эйлера можно считать несостоявшимся. Ж. Лагранж показывает несостоя-

тельность предшествующих доказательств принципа рычага и предлагает свое

собственное доказательство. В основу этого доказательства был положен так

называемый принцип достаточного основания, который в настоящее время в

рациональных науках не применяется. Если обратиться к рис. 1.2, то постулат,

использованный Лагранжем, состоит в следующем. Он считает, что при вы-

полнении условий a = b, **P**1 = **P**2 тело находится в равновесии, поскольку у

него нет никаких оснований повернуться в ту или другую сторону. Это и есть

принцип достаточного основания применительно к рассматриваемому случаю.

Здесь, по существу, неявно использован второй закон статики, но не в форме

второго равенства в системе (1.2.1), а посредством соображений симметрии.

Значительно позднее, а именно в 1918 г., Э. Нетер показала эквивалентность

соображений симметрии и фундаментальных законов. Поэтому фактически

Ж. Лагранж при доказательстве принципа рычага использовал второй закон

статики. Приняв вышеуказанный постулат, Ж. Лагранж весьма остроумными

рассуждениями доказывает принцип рычага. Ошибка Ж. Лагранжа, привед-

шая к отрицанию моментов как самостоятельных сущностей, в сочетании со

многими достоинствами трактата “Аналитическая механика”, обеспечившими

ему необычайную популярность, дорого стоила механике и задержала ее раз-

витие на много десятилетий.

Не нашел в Лагранже этого принципа. Там предложен действительно «всеобщий принцип виртуальных скоростей». Никаких моментов, только мощности.

Если бы Дж. Максвелл был бы знаком с трудами

позднего Эйлера, то, можно предположить, лицо современной теоретической

физики было бы совершенно другим.

Вернемся, однако, к принципу рычага Архимеда. Принятие законов статики

(1.2.1), делает задачу, указанную на рис.1.2, вполне элементарной. Действи-

тельно, примем в качестве тела *A* сам рычаг. Окружение *A*e тела *A* состоит

из трех тел: тела *B*, создающего силу **P**1, тела *C*, создающего силу **P**2 и тела

*D*, т.е. опоры. Запишем первый закон статики

**F**(*A*, *A*e) = **F**(*A*, *B*) + **F**(*A*, *C*) + **F**(*A*, *D*) = **P**1 + **P**2 + **R** = **0**, (1.3.1)

где **R** есть реакция в опоре, т.е. сила, действующая на рычаг со стороны опоры.

Пусть единичные векторы **i** и **j** являются ортами горизонтального и верти-

кального направлений. Тогда **P**1 = −P1 **j**, **P**2 = −P2 **j**. В результате, согласно

уравнению (1.3.1) имеем **R** = (P1 + P2)**j**. Обратимся к уравнению моментов,

т.е. ко второму из равенств (1.2.1). В качестве опорной точки выберем точку

контакта рычага с опорой. Начало в системе отсчета также выберем в этой

точке. Тогда имеем

**M**O(*A*, *A*e) = **M**O(*A*, *B*) +**M**O(*A*, *C*) +**M**O(*A*, *D*) = **0**. (1.3.2)

В данной задаче для всех трех тел *B*, *C*, *D* существуют такие точки приве-

дения, что моменты, создаваемые этими телами, сводятся к моментам сил

**M**O(*A*, *B*) = −a **i** *Х* **P**1 = aP1**i** *Х* **j**,

**M**O(*A*, *C*) = b **i** *Х* **P**2 = −bP2**i** *Х* **j**, **M**O(*A*, *D*) = **0**.

Подставляя эти моменты во второй закон статики (1.3.2), получаем

aP1 = bP2. (1.3.3)

Равенство (1.3.3) — это и есть знаменитый принцип рычага Архимеда.

Именно об этом равенстве много десятилетий и даже столетий велась дискус-

сия. Все попытки доказать равенство (1.3.3) на основе только первого закона

статики потерпели неудачу. Таким образом, открыв математическую форму

принципа рычага, Архимед фактически открыл частную форму второго зако-

на статики.

Заметим, что Л. Эйлер открыл второй закон динамики (статики)

в период с 1771 г. по 1776 г. при попытке разрешить совсем другую задачу,

а именно задачу об изгибе тонкого стержня. На полную постановку задачи

об изгибе стержня Л. Эйлеру понадобилось около сорока лет. Интересно, что

в не вполне осознанной, но математически совершенно правильной, форме

Л. Эйлер сформулировал второй закон динамики в 1758 г. при выводе уравне-

ний движения абсолютно твердого тела. И только спустя еще пятнадцать лет

он полностью осознал и значение второго закона динамики и неполноту нью-

тоновой механики. На этом примере видно, как тяжело даются человечеству

фундаментальные открытия.

**1.4. Центр масс. Центр тяжести твердого тела**

Обратимся к рассмотрению важного для приложений понятия центра тяже-

сти, которое хорошо известно из школьного курса физики.

Предварительно введем в рассмотрение важное понятие центра масс. Оно

находит широкое применение в механике, но не вытекает ни из каких физиче-

ских законов и вводится по определению.

Для системы материальных точек центр масс, по определению, вводится

равенством



где векторы **R**k определяют положения материальных точек с массой mk.

Для тел с распределенной массой предыдущее определение обобщается

следующим образом. Все тело разбиваем на бесконечно малые области. Под

бесконечно малой величиной будем иметь в виду очень малую по модулю ве-

личину. Именно так понимал бесконечно малую величину Л. Эйлер. За такие

вольности Л. Эйлера очень жестко критиковали в XIX веке и первой половине

XX века. Однако определение бесконечно малой, принятое в классическом

математическом анализе, как величине, модуль которой меньше любого напе-

ред заданного числа, мало пригодно в механике. В частности, такую величину

нельзя изобразить на рисунке. Интуиция также не может работать с подобным

определением бесконечно малой. Во второй половине XX века значительное

развитие получил так называемый нестандартный математический анализ, в

котором язык, используемый Л. Эйлером, был узаконен. Итак, все тело раз-

биваем на бесконечно малые части с массой dm. Пусть вектор **R** определяет

положение какой-либо внутренней точки этой бесконечно малой части тела.

Тогда центр масс тела определяется интегралом по массе, т.е. суммой всех

бесконечно малых частей

****

Здесь мы обращаемся непосредственно к интуиции читателя. Те, кто зна-

комы с теорией меры и интегралом Стилтьеса, без труда переведут эти рас-

суждения в более строгое с математической точки зрения русло. Кроме того,

они заметят, что выражение (1.4.1) следует из определения (1.4.2). Вместе с

тем, следует иметь в виду, что интуитивные, пусть даже и не строгие, пред-

ставления об интеграле не менее важны, чем строгие определения. Важность

строгих подходов определяется тем, что они позволяют справиться с патоло-

гиями, которые не так уж и редки.

Введем в рассмотрение понятие центра тяжести. В отличие от понятия

центра масс, которое можно ввести для всех тел и при всех условиях, понятие

центра тяжести является весьма узким и относится к единственному случаю

однородного поля тяготения Земли, которую считаем телом *E*. Рассмотрим

некоторое тело *A*. Сила **F**(*A*, *E*), действующая на тело *A* со стороны Земли,

аддитивна по телам, составляющим тело *A*. Таким образом, имеем

****

Сила тяжести тоже является свободным вектором? Может быть все-таки она проходит через центр тяжести?

где постоянный вектор **g** называется вектором свободного ускорения и нахо-

дится экспериментально, вектор силы m**g** называется весом тела *A*. Разуме-

ется, формула (1.4.3) справедлива только вблизи поверхности Земли. Задер-

жимся немного на интуитивном восприятии силы **F**(*A*, *E*). При интуитивном

восприятии силы **F**(*A*, *B*) как реакции тела *B* на всевозможные малые сме-

щения тела *A* обычно не возникает проблем, если тела *A* и *B* находятся в

контакте. Однако тело *A* не контактирует с Землей. Как в этом случае быть

с интуитивным восприятием силы **F**(*A*, *E*)? Возможны несколько ответов, но

мы приведем только наиболее простой для начинающего изучать механику.

Вообразим, что тело лежит на идеально гладкой горизонтальной поверхно-

сти. Попробуем его поднять. При этом контакт нарушается, тем не менее мы

ощущаем, что Земля препятствует этому подъему посредством создания си-

лы тяжести. Это означает, что сила **F**(*A*, *E*) отлична от нулевой.

Это уловка. Сила тяжести не связана с перемещениями.

Если теперь

мы попробуем сдвигать тело вдоль горизонтальной поверхности, то в отсут-

ствии трения мы сделаем это безо всякого сопротивления со стороны Земли.

Это означает, что проекция силы **F**(*A*, *E*) на любое горизонтальное направле-

ние равна нулю. Забежав вперед, обсудим интуитивное восприятие момента,

создаваемого Землей. Обратимся к рис. 1.2.

Пусть на рычаг не действует никаких сил,



кроме сил тяжести. С детства каждый чело-

век знает, что если однородный рычаг опи-

рается в одной точке на опору, то он в поле

тяготения наклонится в ту сторону, где пле-

чо рычага больше. Иными словами, рычаг

повернется. Это и означает существование

момента. Если теперь, мы начнем увеличи-

вать короткое плечо рычага, уменьшая при

этом длинное плечо, то наступит момент, ко-

гда бывшее короткое плечо станет длиннее

бывшего длинного плеча, и рычаг повернет-

ся в другую сторону. Если же мы выберем

точку контакта с опорой точно в середине

рычага, то он никуда не повернется и будет находиться в безразличном рав-

новесии. Это означает, что в этом случае на рычаг не действует никакого

момента. Именно так устроены детские рычажные качели.

 Заканчивая это по яснение, отметим два обстоятельства. Первое. Не нужно пренебрегать столь

простыми примерами. Интуицию следует развивать именно на них. С более

сложными случаями тренированная интуиция справится сама. Второе. Инту-

итивное восприятие контактных взаимодействий только кажется проще. Если

мы посмотрим на зону контакта через мощный микроскоп, то мы увидим, что

никакого контакта на самом деле нет.

Обратимся к вычислению момента **M**Q(*A*, *E*). Момент также аддитивен по

телам, составляющим тело *A*. Будем считать, что тело *A* состоит из бесконечно

малых тел с массой dm. Тогда для этих тел имеем

**M**Q(dm, *E*) = (**R** − **R**Q) *Х* **F**(dm, *E*) = (**R** − **R**Q) *Х* **g**dm,

где вектор **R** определяет положение какой-либо внутренней точки области тела

с массой dm.

Очевидно, что собственно момент в этом случае равен нулю, если тело с

массой dm рассматривать как материальную точку. Полный момент, действу-

ющий на тело *A* и создаваемый полем тяготения, вычисляется по формуле

****Сравнивая это выражение с определением момента (1.1.3), видим, что при

выборе точки приведения в центре масс собственно момент равен нулю. Ины-

ми словами, поле тяготения Земли создает чисто силовое воздействие на тело

*A*

Это справедливо только для однородного поля силы тяжести

**F**(*A*, *E*) = m**g**, **M**Q(*A*, *E*) = (**R**C − **R**Q) *Х*m**g**. (1.4.5)

Применительно к случаю однородного поля силы тяжести центр инерции тела называют

центром тяжести тела. Найдем положение равновесия абсолютно твердого

тела в виде плоской фигуры с массой m, подвешенной на нерастяжимой нити,

которую примем за тело *B*. Нить закреплена одним концом в точке, которую

примем за начало в системе отсчета, а другим концом прикреплена к телу

*A* в точке B (рис. 1.3). Вычислим силу **F**(*A*,*A*e), действующую на тело *A* и

запишем первый закон статики. Имеем

**F**(*A*,*A*e) = **F**(*A*, *B*) + **F**(*A*, *E*) = **T** +m**g** = **0** ⇒ **T** = −m**g**

где вектор **T** есть сила, с которой нить, т.е. тело *B*, действует на тело *A*.

Момент **M**Q(*A*, *B*) вычисляется стандартным образом

**M**Q(*A*, *B*) = (**R**P − **R**Q) *Х* **T** + **L**P(*A*, *B*). (1.4.6)

Если в качестве точки приведения выбрать точку подвеса B, то собственно

момент **L**P(*A*, *B*) равен нулю, поскольку нить не сопротивляется повороту тела

*A* вокруг точки подвеса. Запишем теперь второй закон статики

**M**Q(*A*,*A*e) = **M**Q(*A*, *B*) +**M**Q(*A*, *E*) =

= (**R**B − **R**Q) *Х* **T** + (**R**C − **R**Q) *Х*m**g** = (**R**C − **R**B) *Х*m**g** =

Здесь мы воспользовались формулами (1.4.5). Из последнего равенства немед

ленно следует, что

**R**C − **R**B = εl**j**, ε= 1, либо ε = −1, (1.4.7)

где l есть расстояние от точки подвеса B до центра тяжести.

Равенство (1.4.7) не дает решения задачи, поскольку неизвестными являют-

ся два вектора **R**B и **R**C. Здесь возможны два способа рассуждений. Первый

основан на интуиции. Нить — это такой объект, который может передавать силу только сонаправленную с нитью и не может передавать поперечную нагрузку. Поскольку сила **T** направлена вертикально вверх, то и вектор **R**B должен быть направлен либо вертикально вверх, либо вертикально вниз. Но вектор **R**B не может быть направлен вертикально вверх, поскольку в этом случая сила **T** будет сжимать нить. Нить же не может работать на сжатие.

Считая, что

**g** = −g**j**, получаем **T** = mg**j**. Следовательно, для вектора **R**B имеем равенство

**R**B = −a**j**, где a есть расстояние от точки закрепления до точки подвеса. Вто-

рой способ рассуждений основан на применении первого и второго законов

статики непосредственно к нити. Но и при этом подходе нужно использовать

интуитивное утверждение о том, что нить не может выдерживать сжимающую

нагрузку. Конечный результат для вектора **R**B, разумеется, будет тем же самым.

Теперь уравнение (1.4.7) дает выражения для вектора **R**C

****

Итак, получили два положения равновесия. В первом случае центр масс

находится ниже точки подвеса — это устойчивое положение равновесия. Во

втором случае центр масс находится выше точки подвеса — неустойчивое

положение равновесия, которое не реализуется в действительности.

Зачем вводить в рассмотрение точку В? Если записать уравнение моментов относительно точки крепления нити, то все решается в одну строчку. Обязательное рассмотрение точки привидения, принадлежащей телу, излишне. Оно связано с желанием автора перемещать силу только по телу. Но ведь все перемещения силы виртуальны, и связаны с эквивалентными преобразованиями исходной системы сил.

**1.5. Иллюстративные задачи**

***Задача 1: шарнирно опертая балка, нагруженная силой.*** Рассмотрим за-

дачу, изображенную на рис. 1.4.

В качестве тела *A* примем саму рассмат-

риваемую балку. Левую опору, закреплен-

ную от смещений, примем за тело *B*. Эта

опора препятствует смещениям балки, но

не препятствует поворотам балки вокруг

точки соединения балки с опорой. Правую

опору балки примем за тело *C*. Эта опора препятствует вертикальным сме-

щениям правого торца балки, но не препятствует горизонтальным смещениям

балки и поворотам балки вокруг точки соединения правого конца балки с

правой опорой. Наконец, в качестве тела *P* будем считать некое устройство,

воздействие которого на тело *A* сводится к силе **P**. Запишем первый закон

статики

**F**(*A*,*A*e) = **F**(*A*, *B*)+**F**(*A*, *C*)+**F**(*A*,*P*) = **F**(*A*, *B*)+**F**(*A*, *C*)−P**j** = **0**. (1.5.1)

Поскольку правая опора *C* не препятствует смещению балки вдоль гори-

зонтальной оси, то имеем ограничение

**F**(*A*, *C*) ***·* i** = 0 ⇒ **F**(*A*, *C*) = FC**j**. (1.5.2)

Уравнение (1.5.1) содержит два неизвестных вектора. Поэтому необходи-

мо использовать дополнительное уравнение, роль которого исполняет второй

закон статики.

**M**Q(*A*,*A*e) = **M**Q(*A*, *B*) +**M**Q(*A*, *C*) +**M**Q(*A*,*P*) = **0**. (1.5.3)

В качестве опорной точки Q выберем точку контакта левой опоры с балкой.

С этой же точкой совместим начало в системе отсчета. Тогда имеем **R**Q =

**0**. Моменты необходимо вычислять по формуле (1.1.3). В рассматриваемой

задаче для каждого из моментов1, входящих в (1.5.3), точки приведения можно

выбрать так, чтобы собственно моменты обращались в нулевые. Для момента

**M**Q(*A*, *B*) точку приведения выбираем на левой опоре. Для момента **M**Q(*A*, *C*)

точку приведения выбираем на правой опоре. Наконец, для момента**M**Q(*A*,*P*)

точку приведения выбираем в точке касания устройства, создающего силу **P**,

с балкой. В таком случае имеем выражения

**M**Q(*A*, *B*) = **0**, **M**Q(*A*, *C*) = l **i** *Ч* **F**(*A*, *C*) = l FC **i** *Ч* **j**,

**M**Q(*A*,*P*) = a**i** *Ч* (− P **j**), (1.5.4)

где l — расстояние между опорами, a — расстояние от левой опоры до “точки

приложения” силы **P**.

При вычислении момента **M**Q(*A*, *C*) использовано уравнение (1.5.2). Под-

ставляя выражения (1.5.4) в уравнение (1.5.3), получаем



Сложно о простом.

***Задача 2: балка, опирающаяся на гладкую опору.***

Рассмотрим конструкцию, изображенную на рис. 1.5. Левый конец одно-

родной балки длиной 2l шарнирно закреплен в точке O, которую совместим

с началом в системе отсчета. Эту же точку O выберем в качестве опорной

точки, т.е. **R**Q = **R**O = **0**. Балку считаем телом *A*. Опору считаем телом *O*.

Угловую стенку, отстоящую от точки O на расстоянии a и имеющую высоту

h, считаем телом *B*. При этом выполнено неравенство a2+h2 < 4l2. Наконец,

Землю обозначаем телом *E*. Балку считаем идеально гладкой, т.е. трением между балкой и угловой стенкой пренебрегаем. Выпишем первый закон статики и воспользуемся аксиомой аддитивности

**F**(*A*,*A*e) = **F**(*A*,*O*) + **F**(*A*, *B*) + **F**(*A*, *E*) = **F**(*A*,*O*) + **P** − mg**j** = **0**, (1.5.5)

где m есть масса балки. Пусть единичный вектор **e** направлен вдоль балки.

Поскольку балка идеально гладкая, то сила **F**(*A*, *B*) = **P** удовлетворяет условию

**P *·* e** = **0** ⇒ **P** = P (**i** *Х* **j**) *Х* **e**,

где вектор (**i** *Х* **j**) *Х* **e** есть вектор единичной нормали к балке, а P есть величина реакции угловой стенки.

Теперь первый закон статики (1.5.5) дает

**F**(*A*,*O*) = mg**j** − P (**i** *Х***j**) *Х* **e**. (1.5.6)

Осталось определить величину реакции P. С этой целью выпишем второй

закон статики

**M**O(*A*,*A*e) = **M**O(*A*,*O*) +**M**O(*A*, *B*) +**M**O(*A*, *E*) = **0**. (1.5.7)

Чтобы вычислить моменты, входящие в (1.5.7), нужно воспользоваться

определением момента (1.1.3). Напомним, что точку приведения для каждого

из этих моментов можно выбирать произвольно. Более того, в данной задаче

точки приведения можно выбрать так, чтобы собственно моменты обращались

в нулевые. Легко получаются выражения

**M**O(*A*,*O*) = **R**O *Ч* **F**(*A*,*O*) = **0**, **M**O(*A*, *E*) = −mgl **e** *Х* **j** = −mga**k**,

****

где l — расстояние от точки O до центра масс C балки, *√*a2 + h2 — расстояние

от точки O до точки контакта балки с угловой стенкой, **k** = **i** *Ч* **j**.

Подставляя эти равенства в (1.5.7), получаем уравнения для нахождения

реакции P



Выражение (1.5.6) принимает вид

****Принципиальное нежелание автора перейти к скалярным уравнениям равновесия усложняет решение.

***Упражнение****: проанализировать выражение для реакции в опоре (1.5.8)*

*и объяснить почему вертикальная составляющая реакции меняет знак при*

*некоторых значениях параметров.*

***Задача 3: консольная балка, нагруженная на конце.***

Консольные балки часто встречаются на практике поэтому умение вычислять силы и моменты в такого

рода ситуациях оказывается необходимым. Рассмот-

рим простую задачу, представленную на рис. 1.6. В

качестве тела *A* выбираем саму балку. В качестве тела

*B* выбираем заделку на левом конце балки. Наконец,

в качестве тела *C* выбираем подвешенный на левом торце балки груз на нити.

Балку считаем невесомой. Первый закон статики в данном случае принимает

вид

**F**(*A*,*A*e) = **F**(*A*, *B*) + **F**(*A*, *C*) = **F**(*A*, *B*) − mg**j** = **0** ⇒ **F**(*A*, *B*) = mg**j**. (1.5.9)

Таким образом, реакция в заделке определена. Чтобы определить момент,

действующий в заделке, необходимо воспользоваться вторым законом статики

**M**Q(*A*,*A*e) = **M**Q(*A*, *B*) +**M**Q(*A*, *C*) = **0**. (1.5.10)

Опорную точку Q выберем на левом торце балки и там же поместим начало

в системе отсчета, т.е. **R**Q = **0**. Тогда получим

**M**Q(*A*, *B*) = **R**P *Х* **F**(*A*, *B*) + **L**P(*A*, *B*).

Нетрудно убедиться, что при любом выборе точки приведения P собственно

момент **L**P(*A*, *B*) отличен от нуля. Выберем точку приведения так, что **R**P =

**R**Q = **0**. Тогда имеем

**M**Q(*A*, *B*) = **L**Q(*A*, *B*).

Для момента **M**Q(*A*, *C*) точку приведения выберем на правом торце балки.

Тогда собственно момент **L**C(*A*, *C*) будет равняться нулю. Получаем

**M**Q(*A*, *C*) = **R**C *Х* **F**(*A*, *C*) = l**i** *Х* −(mg**j**) = −mgl **i** *Х* **j**.

Используя последние два равенства и второй закон статики (1.5.10), полу-

чаем моментную реакцию в заделке

**M**Q(*A*, *B*) = mgl **i** *Х* **j**. (1.5.11)

Задача решена. При этом видим, что воздействие заделки на балку, т.е.

реакция заделки, выражается как силой, так моментом. Заметим, однако, что

здесь момент выражается как момент силы, т.е. понятие, существовавшее в

ньютоновой механике.

***Задача 4: нагруженный элемент фермы.***

Фермами называют стержневые системы, состоящие из большого числа

прямолинейных стержней. Фермы часто встречаются на практике. На рис. 1.7

представлен типичный элемент фермы, состоящий всего из двух стержней,

один из которых нагружен поперечной нагрузкой.

Решение этой простой задачи включает использование полезного приема, когда уравнения статики при-

ходится записывать не только для всего тела, но и для тел, составляющих

рассматриваемое тело. В качестве тела A выбираем конструкцию из соеди-

ненных между собой стержней B и C, длина которых одинакова и равна

l.

Шарнирное соединение O позволяет стержням B и C свободно поворачи-

ваться относительно друг друга. Стержни шарнирно закреплены в точках F

и G, расстояние между которыми равно a. Стержень C нагружен постоянной

горизонтальной нагрузкой интенсивности q. Начало системы отсчета разме-

стим в точке F. При вычислении моментов опорную точку выбираем также

в точке F и в дальнейшем это обстоятельство не отмечаем. Кроме того, при-

мем обозначение **R**O = l**e**, где **e** есть единичный вектор. Выпишем уравнения

статики для тела A. При этом мы не будем воспроизводить все необходимые

рассуждения. Читателю рекомендуется самостоятельно провести эти рассуж-

дения и убедиться в справедливости всех нижеследующих уравнений. Итак,

уравнения статики для тела A имеют вид

**F**(A,Ae) = **F**(A, F) + **F**(A, G) + ql**i** = **0**, (1.5.12)

**** Получили два векторных уравнения (1.5.12) и (1.5.13) для двух неизвест-

ных векторов **F**(A, F) и **F**(A, G). Тем не менее, этих уравнений недостаточно,

ибо уравнение (1.5.13) эквивалентно всего одному скалярному уравнению и

не позволяет найти проекцию **F**(A, G) на вектор **i**. Чтобы решить задачу, необ-

ходимо разделить все тело на отдельные элементы и уже для них выписать

уравнения статики. Подобный прием встречается очень часто. Например, для

деформируемых тел приходится записывать уравнения статики для бесконеч-

но малых частей тела. В данной задаче достаточно записать уравнения статики для стержня B

**F**(B, F) + **F**(B, C) = **0**, l**e** *Ч* **F**(B, C) = **0** ⇒ **F**(B, F) = λ**e**.

Теперь уравнения (1.5.12) и (1.5.13) дают

**** Задача решена, но читателю необходимо убедиться, что усилия в обоих

стержнях направлены вдоль стержней. Собственно, именно это обстоятельство

и является главным достоинством ферм, поскольку стержни хорошо работают

на растяжение-сжатие.

Это не так для нагруженного стержня. А доказывать здесь нужно теорему о 3х силах.

**1.8. Связь используемых терминов с традиционными**

Основные положения и законы статики формировались в течение многих

столетий. Движущей силой развития механики и, в частности, статики бы-

ла необходимость решения насущных практических задач. На каждом этапе

своего развития механика успешно решала свою главную задачу — разра-

ботку методов решения новых задач, непрестанно возникающих в технике и

строительстве. Методы решения практических задач изобретались учеными в

отсутствии важнейших понятий. Поэтому в механику вводились положения,

роль которых в логическом фундаменте механики было трудно оценить. Клас-

сическим примером здесь является принцип рычага Архимеда. Он широко

применялся, на основе этого принципа действуют многие машины и приборы.

Никто не сомневался в его правильности. Но какова его роль в логическом

фундаменте механики? В течение многих столетий это оставалось тайной.

Пытаясь ясно определить понятие силы, С. Стевин вводит в 1580 г. поня-

тие вектора, которое постепенно нашло широкое применение в механике. Но

незамкнутость логических основ, выражающаяся, в частности, в отсутствии

явной формулировки второго закона динамики Л. Эйлера, привела к тому,

что пришлось вводить различные понятия вектора. Стали различать прило-

женные, скользящие и свободные векторы [74]. Благодаря этому различению

удалось предложить методы, позволяющие с успехом преодолевать трудности

при решении возникающих задач. Но, конечно, возникали логические пробле-

мы. Например, сила стала считаться приложенным вектором, т.е. сила харак-

теризовалась модулем, направлением в пространстве и точкой приложения.

Сила действительно является приложенным вектором. К элементарному объему тела может быть приложена только элементарная сила (интенсивность). Все взаимодействия - распределенные. Ни конечная сила, ни момент не могут быть приложены к элементарному объему тела (точке). Постулируемый принцип аддитивности, вместе с двумя принципами статики (по Жилину) фактически постулируют теорему Пуансо, которую следует доказывать. Принципиальным здесь является появление класса эквивалентности для сил, приложенных к твердому телу.

Строго говоря, в таком случае нельзя использовать правило параллелограмма

для сложения сил, приложенных в разных точках. Поэтому было предложе-

но правило переноса точки приложения силы, при этом пришлось добавлять

некий момент силы. Понятия силы и момента причудливо смешались.

Ничего не смешалось. Сложение векторов не физическая, а математическая операция. Сумма называется главным вектором. Не каждая сумма имеет физический смысл. Так, сумма скоростей точек не имеет физического смысла, а сумма количеств движений имеет. То же для моментов скоростей и моментов количеств движений.

От-

крытие явной формы второго фундаментального закона динамики радикально

изменило ситуацию, особенно в логическом отношении. Появилась возмож-

ность резко укрепить логический фундамент механики, но почти два столетия

ученые проходили мимо этой возможности. Почему? Ответ очевиден. Име-

лось огромное количество важных задач, которые требовали немедленного ре-

шения. Разработанные методы позволяли их решать. Поэтому вылавливание

логических несоответствий считалось никому не нужным эстетством, что мно-

гих действующих исследователей, решающих конкретные проблемы, просто

раздражало. Действительно серьезные проблемы, которые было невозможно

решить в рамках ньютоновой механики, возникли только в конце XIX века,

когда началось интенсивное внедрение в микромир, в котором главную роль

исполняет именно второй закон динамики и сопутствующие ему понятия мо-

мента и спинорных движений.

Ньютон под телом понимал точку. Поэтому и рассматривал центральные взаимодействия. Моментные и нецентральные взаимодействия возможны только между телами, связанными невесомой средой, передающей эти взаимодействия. Ведь силы, приложенные к невесомому телу (среде), находятся в равновесии при любом движении.

 Не имея в то время возможности полноценно

описывать электричество, магнетизм и ряд других явлений, механика устра-

няется от обсуждения этих вопросов и освобождает место лидера, которое

перешло к релятивистской и квантовой физике. Механика постепенно теряла

статус фундаментальной науки, хотя и сохраняла ведущие позиции в решении

прикладных задач. Чтобы вернуть себе статус фундаментальной науки ме-

ханике необходимо решительно перейти на фундамент эйлеровой механики,

которая допускает неограниченные возможности дальнейшего развития. По-

сле этого механика должна со своих позиций попытаться объяснить огромное

количество фактов, установленных современной экспериментальной физикой.

Столь долгое вступление понадобилось автору, чтобы объяснить причины

такого ответственного решения, как частичный отказ от традиционного изло-

жения статики, включая устоявшиеся термины и привычные теоремы. Чтобы

смягчить последствия этого перехода далее приводятся традиционные терми-

ны и их связь с используемыми в данной книге. Ниже традиционные термины

[35] выделены полужирным курсивом.

***Главный вектор системы сил,*** действующих на тело *A*, — это сила

**F**(*A*,*A*e), действующая на тело *A* со стороны его окружения *A*e.

Это просто вектор. То, что сила из винта Пуансо равна главному вектору, нужно доказывать..

***Момент*** в учебниках теоретической механики вводится только как мо-

мент силы.

Момент тоже является математическим понятием. Момент силы относительно центра имеет физический смысл только при фиксации опоры в центре момента. Моментом можно назвать также систему сил, приложенных к телу, если ее главный вектор равен нулю.

Определение момента, даваемое выражением (1.1.3), в литературе

отсутствует.

Существует. Это формула зависимости момента от центра.

Но определение (1.1.3) переходит в традиционное определение

момента силы, если существует такая точка приведения, при выборе которой

собственно момент отсутствует.

А это случай существования равнодействующей. Да еще такой, линия действия которой пересекает тело.

***Главный момент системы сил*** — это момент **M**Q(*A*,*A*e)) при условии,

что тела, составляющие окружение тела *A*, создают чисто силовые воздей-

ствия. Роль, которую играет главный момент системы сил в традиционном

изложении, в эйлеровой механике исполняет момент **M**Q(*A*,*A*e)).

Чем мешают моментные взаимодействия?

***Сходящаяся система сил.*** Этот термин связан с принятием концепции си-

лы как приложенного вектора.

Скорее скользящего вектора. Понятие скользящего вектора излишне. Силы есть приложенные векторы. Свойство эквивалентного скольжения доказывается.

 В эйлеровой механике сила — это свободный вектор, поэтому отпадает необходимость во введении понятия сходящейся си-

стемы сил.

Свобода силы жестко ограничена условием по моментам. .

***Равнодействующая сходящейся системы сил.*** В эйлеровой механике этот

термин не нужен.

А зря. И что же такое чисто силовое воздействие, как не наличие равнодействующей?

***Эквивалентные системы сил.*** Две системы сил называются эквивалентны-

ми, если их главные векторы сил и главные моменты совпадают.

Это условие, а не определение.

 Если считать,

что силы и моменты создаются другими телами (моделируют присутствие дру-

гих тел), то речь должна идти о двух разных окружениях тела *A*, создающих

одинаковые воздействия на тело *A*. Ситуации такого рода слишком экзотичны

с прикладной точки зрения, чтобы для них вводить специальный термин.

Речь идее не о разных окружениях, а о мысленной замене данной системы сил более простой системой, эквивалентной в определенном смысле . Как делает сам П.А Жилин находя вес тела.

***Пара.*** Парой или, более точно, парой сил называют систему двух равных

по величине сил, имеющих параллельные линии действия, но направленных в

разные стороны. Это понятие подразумевает концепцию силы как приложен-

ного вектора и потому не применяется в эйлеровой механике.

Пара это простейшая вращательная система сил. Человек, никогда не державший в руках т образный торцевый гаечный ключ, этого не понимает.

***Теорема Пуансо.*** Формулировка этой теоремы звучит следующим образом

[41]: *Произвольная система сил, приложенных к твердому телу, эквивалент-*

*на системе, состоящей из одной силы, приложенной в какой-либо точке* O

*тела (центре приведения) и равной главному вектору* **R** *данной системы сил,и одной пары, момент которой равен главному моменту* **M**O *всех сил относительно точки* O*.* В эйлеровой механике теорема Пуансо не нужна, поскольку все, что она может дать, намного перекрывается самой концепцией воздействий. Примерно то же самое можно сказать о ряде других теорем статики, представленных в разных книгах.

Ну как же так. Ведь именно теорема Пуансо изначальна постулирована в данном труде.

***Принцип возможных (виртуальных) перемещений.*** Этот принцип широ-

ко применяется при решении задач статики. Позднее будет показано, что кор-

ректная форма принципа возможных перемещений является просто частной

формой записи третьего фундаментального закона механики, т.е. уравнения

баланса энергии. При этом принцип возможных перемещений в общем слу-

чае не может заменить собой третий фундаментальный закон. Поэтому нет

нужды вводить дополнительный принцип, имеющий к тому же весьма узкую

область применимости. В учебниках механики принцип возможных перемеще-

ний излагается в весьма ограничительной формулировке, которая во многих

задачах статики неприменима. В частности, определение ***идеальных связей***

плохо согласуется с принятым в современной механике понятием идеальных

процессов, т.е. процессов, протекающих без потерь энергии.

Существуют и другие менее распространенные термины, но их обсуждение

представляет интерес только для специалистов-профессионалов

Жаль, хотелось бы услышать критику и остальных терминов классической механики.